Soluciones a los ejercicios propuestos del Tema 8

8.1.(a) Se ha de dibujar la gráfica de la función (de p) $P_a(p)$, que es la probabilidad de aceptar un lote cuya proporción de unidades no conformes es p, con el plan simple n, c, y viene dada por

$$P_a(p) = (1-p)^{50} + 50\,p\,(1-p)^{49} + 1225\,p^2\,(1-p)^{48}$$

8.1.(b) Ídem con la gráfica de

$$P_a(p) = (1-p)^{100} + 100\,p\,(1-p)^{99} + 4950\,p^2\,(1-p)^{98} + 161700\,p^3\,(1-p)^{97}$$

8.2.(a) Calculamos en primer lugar la probabilidad de aceptar un lote cuya proporción de unidades no conformes es 0.02, con el plan simple $n = 50$ y $c = 1$, que es: $P_a(p = 0.02) = 0.98^{50} + 50 \times 0.02 \times 0.98^{49} = 0.7357713945$. Entonces, el valor del ATI cuando inspeccionamos lotes de tamaño $N = 2000$ es:

$$\begin{aligned} ATI(p = 0.02) &= n + (N-n)\,(1 - P_a(p = 0.02)) \\ &= 50 + (2000 - 50)\,(1 - 0.7357713945) = 565.2457808\,. \end{aligned}$$

8.2.(b) El valor del AOQ es:

$$\begin{aligned} AOQ(p = 0.02) &= \frac{p\,(N-n)\,P_a(p)}{N} = \frac{0.02 \times (2000 - 50) \times 0.7357713945}{2000} \\ &= \frac{28.69508438}{2000} = 0.01434754219\,. \end{aligned}$$

8.3.(a) Se ha de dibujar la gráfica de

$$P_a(p) = (1-p)^{150} + 150\,p\,(1-p)^{149} + 11175\,p^2\,(1-p)^{148}\,.$$

8.3.(b) La probabilidad de aceptar el lote con el plan si $p = 0.05$ es $P_a(p = 0.05) = 0.01815405502$. Entonces,

$$ATI(0.05) = 150 + (3000 - 150)\,(1 - 0.0.01815405502) = 2948.260943$$
$$AOQ(0.05) = \frac{0.05 \times (3000 - 150) \times 0.01815405502}{3000} = 0.0008623176133$$

8.4.(a) La probabilidad de aceptar el lote, $P_a(p) = (1-p)^{50}$, ha de ser $1-0.9 = 0.1$. Igualando, $p = 1 - 0.1^{1/50} = 0.04500741398$.
8.4.(b) La probabilidad de rechazar el lote es 1 menos la probabilidad de aceptarlo, es decir, $1 - P_a(p = 0.015) = 1 - (1 - 0.015)^{50} = 0.5303097718\,.$
8.4.(c) A partir de la probabilidad de aceptar el lote calculada en el apartado anterior, $P_a(p = 0.015) = (1 - 0.015)^{50} = 0.4696902282\,$, tenemos que

$$ATI(0.015) = 50 + (5000 - 50)\,(1 - 0.4696902282) = 2675.03337$$
$$AOQ(0.015) = \frac{0.015 \times (5000 - 50) \times 0.4696902282}{5000} = 0.006973593888$$

8.5.(a) La probabilidad de aceptar el lote, $P_a(p) = (1 - p)^6$, ha de ser 0.95. Igualando, $p = 1 - 0.95^{1/6} = 0.0085124446\,.$
8.5.(b) Coste por lote rechazado haciendo rectificación:

$$C_r(p) = N \times 0.10 + N \times p \times 0.50 = 1000 \times 0.10 + 1000 \times p \times 0.50 = 500\,p + 100\,.$$

Coste por lote aceptado:

$$\begin{aligned} C_a(p) &= n \times 0.10 + n \times p \times 0.50 + (N - n) \times p \times 10.50 \\ &= 6 \times 0.10 + 6 \times p \times 0.50 + (1000 - 6) \times p \times 10.50 = 10440\,p + 0.6\,. \end{aligned}$$

Igualando, $C_r(p) = C_a(p)$ tenemos que

$$500\,p + 100 = 10440\,p + 0.6 \Leftrightarrow 9940\,p = 99.4 \Leftrightarrow p = 0.01\,.$$

Si $p > 0.01$ es mayor el coste de aceptación; si $p < 0.01$, es mayor el de rechazo.
8.6.(a) Los límites de control son: $UCL = 0.07 + 3\sqrt{\frac{0.07\times0.93}{400}} = 0.10827$, $CL = 0.07$, $LCL = 0.07 - 3\sqrt{\frac{0.07\times0.93}{400}} = 0.03173\,.$
8.6.(b) Hemos de calcular $P(\hat{p} > UCL) = P(B(400, p_0') > 43.308)$ (aquí hemos usado que $n \times UCL = 400 \times 0.10827 = 43.308$). Esta probabilidad

es igual a $1 - P(B(400,\, p_0') \leq 43)$, cuyo valor obtendremos aproximadamente utilizando la aproximación de la binomial por la normal, con la corrección de Yates, así: $1 - P(B(400,\, p_0') \leq 43) \cong 1 - P(N(0,1) \leq \frac{43+0.5-400\,p_0'}{\sqrt{400\,p_0'\,(1-p_0')}}) \cong 1 - P(N(0,1) \leq 0.58) = 0.28096\,.$

8.6.(c) $P($ detectar con la primera $)+P($ no detectar con la primera $)\ P($ detectar con la segunda $) = 0.28096 + (1 - 0.28096)\, 0.28096 = 0.48298.$

8.7. $LCL = p_0 - 3\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}} > 0 \Longrightarrow n > 9\,\frac{1-p_0}{p_0} = 9\,\frac{0.8}{0.2} = 36$. Luego $n \geq 37$.

8.8. Calculamos los límites de control para el gráfico con todas las (20) observaciones:

$$UCL = 0.08925,\ CL = 0.03450,\ LCL = 0\,.$$

No podemos decir que el proceso se encontrase bajo control ya que las muestras 9 y 17 indican fuera de control. Las eliminamos y recalculamos los límites sin ellas (con las 18 restantes):

$$UCL(\text{recalc.}) = 0.07077,\ CL(\text{recalc.}) = 0.0244,\ LCL(\text{recalc.}) = 0$$

Seguimos sin poder decir que el proceso se encontrase bajo control, ya que ahora la muestra 1 indica fuera de control. La eliminamos y volvemos a recalcular los límites de control, con las 17 observaciones restantes, encontrando ahora que sí que se puede decir que el proceso estaba bajo control durante el período en el que se tomaron estas muestras:

$$UCL(\text{final}) = 0.06437,\ CL(\text{final}) = 0.02118,\ LCL(\text{final}) = 0\,.$$

8.9. Los límites de control para el $\bar{X}$-gráfico son:

$$UCL = 14.56,\ CL = 10.38,\ LCL = 6.162\,.$$

Los límites de control para el S-gráfico:

$$UCL = 5.864,\ CL = 2.588,\ LCL = 0\,.$$

Ambos gráficos indican control.

8.10. El límite inferior de control del $\bar{X}$-gráfico es: $LCL = 100 - 3\,\frac{6}{\sqrt{9}} = 94\,.$ Hemos de calcular, suponiendo que el verdadero valor de la media μ es 92, la siguiente probabilidad:

$$P(\bar{X} < 94) = P(N(0,1) < \frac{94-92}{6\,/\,\sqrt{9}}) = P(N(0,1) < 1) = 0.84134\,.$$

8.11.(a) Los límites de control se calculan a partir de $\bar{\bar{x}} = 20$, $\bar{s} = 1.5$ y $c_4(6) = 0.9515$. Para el $\bar{X}$-gráfico son:
$UCL = 20 + 3\,\frac{1.5}{0.9515\,\sqrt{6}} = 21.93076$, $CL = 20$ y $LCL = 20 - 3\,\frac{1.5}{0.9515\,\sqrt{6}} = 18.06924$.

Para el S-gráfico:
$UCL = 1.5\,\big(1 + \frac{3}{0.9515}\,\sqrt{1 - 0.9515^2}\big) = 2.95499$, $CL = 1.5$ y $LCL = 1.5\,\big(1 - \frac{3}{0.9515}\,\sqrt{1 - 0.9515^2}\big) = 0.04501$.

8.11.(b) Calcularemos en primer lugar la proporción de unidades que han de ser destruidas, usando como estimación de μ_0, $\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{x}} = 20$, y como estimación de σ_0, $\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{s}}{c_4(6)} = \frac{1.5}{0.9515} = 1.576458224$,

$$\begin{aligned} P(X > USL) &\cong P(N(0,1) > \frac{23 - 20}{1.576458224}) \\ &= P(N(0,1) > 1.903) \cong 1 - 0.97128 = 0.02872 \end{aligned}$$

(aproximadamente un 3 % de las unidades se han de destruir). Ahora calculamos la proporción de unidades que se pueden reparar:

$$\begin{aligned} P(X < LSL) &\cong P(N(0,1) < \frac{15 - 20}{1.576458224}) \\ &= P(N(0,1) < -3.171\overset{\frown}{6}) \cong 1 - 0.99924 = 0.00076 \end{aligned}$$

(aproximadamente, un 0.076 % se pueden reparar, esto es, 760 ppm, partes por millón).

8.11.(c) Se trata de recalcular las probabilidades del apartado anterior tomando como valor de μ_0, $\mu_0' = 19$, de esta manera:

$$\begin{aligned} P(X > USL) &\cong P(N(0,1) > \frac{23 - 19}{1.576458224}) \\ &= P(N(0,1) > 2.537\overset{\frown}{3}) \cong 1 - 0.99446 = 0.00554 \end{aligned}$$

(aproximadamente un 0.55 % de las unidades se han de destruir; este porcentaje ha bajado). Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(X < LSL) &\cong P(N(0,1) < \frac{15 - 19}{1.576458224}) \\ &= P(N(0,1) < -2.537\overset{\frown}{3}) \cong 1 - 0.99446 = 0.00554 \end{aligned}$$

(aproximadamente un 0.55 % de las unidades se pueden reparar;(este porcentaje ha subido). Se han equilibrado las dos "colas" al centrar el proceso en la media aritmética de LSL y USL. El porcentaje total de no conformes baja: pasa de 0.02948 a 0.01108, y además aumenta el de las unidades que se pueden reparar, por lo que claramente el proceso mejora.

8.12.(a) En primer lugar hemos de calcular $\bar{\bar{x}} = 59.4375$ y $\bar{s} = 13.899$, y buscamos $c_4(4) = 0.9213$ en la tabla. Con estos valores obtenemos los límites de control, para el $\bar{X}$-gráfico:

$$UCL = 82.06694,\ CL = 59.4375,\ LCL = 36.80806\,,$$

y para el S-gráfico:

$$UCL = 31.49803,\ CL = 13.899,\ LCL = 0\,.$$

8.12.(b) No podemos decir que el proceso estuviese bajo control, ya que la muestra 10 "se sale" en el $\bar{X}$-gráfico.

8.12.(c) Mantenemos los mismos límites de control que en el apartado a), tal y como se indica en el b). Hemos de calcular, usando como estimación de μ_0 el valor $\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{x}} = 59.4375$ y como estimación de σ_0 el valor $\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{s}}{c_4(4)} = \frac{13.899}{0.9213} = 15.08629111$, la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < LCL) &\cong P(N(0,1) < \frac{36.80806 - 59.4375}{\frac{15.08629111}{\sqrt{4}}}) \\ &\cong P(N(0,1) < -3) = 1 - 0.99865 = 0.00135\,, \end{aligned}$$

ya que $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$.

8.12.(d) Calculamos en primer lugar la proporción de unidades que se han de destruir:

$$\begin{aligned} P(\text{destruir}) = P(X > USL) = P(X > 75) &\cong P(N(0,1) > \frac{75 - 59.4375}{15.08629111}) \\ &\cong P(N(0,1) > 1.03) = 1 - 0.84849 = 0.15151 \end{aligned}$$

(aproximadamente un 15 % de las unidades se han de destruir). La proporción de unidades que se puede reparar es:

$$\begin{aligned} P(\text{reparar}) = P(X < LSL) = P(X < 45) &\cong P(N(0,1) < \frac{45 - 59.4375}{15.08629111}) \\ &\cong P(N(0,1) < -0.96) = 1 - 0.83147 = 0.16853 \end{aligned}$$

(aproximadamente un 17 %). La proporción de no conformes en total (incluyendo las que se han de destruir y las que se pueden reparar) es la suma, $0.15151+0.16853 = 0.32004$ (un 32 %), y la de conformes, $1-0.32004 = 0.67996$ (un 68 % aproximadamente).